Fourier 級数の各点収束

Theorem. $[-\pi, \pi]$ 上で区分的に滑らかな周期 2π の関数 f に対して Fourier 級数の部分和 $S_n f$ を

$$(S_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \ (x \in \mathbb{R})$$

とする. ただし, c_n $(n \in \mathbb{Z})$ は f の複素 Fourier 係数で

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

とする. このとき

$$\lim_{n\to\infty} (S_n f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \ (x \in \mathbb{R})$$

が成り立つ. ここで

$$f(x^{\pm}) = \lim_{y\to x\pm 0} f(y) \ (\text{複号同順})$$

とする.

Proof. まずは, $S_n f$ を積分を用いて表現する.

$$\begin{aligned}
(S_n f)(x) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)} \right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+s) D_n(-s) ds \ (\because s = x - t) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+s) D_n(s) ds \ (\because D_n \text{は偶関数}) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) D_n(s) \ (\because f, D_n \text{の周期性})
\end{aligned}$$

ただし, $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ を n 次の Dirichlet 核とする. ここで D_n を閉じた式で表すと

$$\begin{aligned}
D_n(x) &= \frac{e^{-inx}(e^{i(2n+1)x} - 1)}{e^{ix} - 1} \ (\because \text{等比数列の和}) \\
&= \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{2i} \frac{2i}{e^{\frac{1}{2}ix} - e^{-\frac{1}{2}ix}} \\
&= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}
\end{aligned}$$

となる. さらに, $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} D_n(s)ds = \int_{0}^{\pi} D_n(s)ds = \pi$ であることを用いると

$$
\begin{aligned}
(S_n f)(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(x+s)D_n(s)ds - \frac{1}{2\pi}f(x^+)\int_0^\pi D_n(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^0 f(x+s)D_n(s)ds - \frac{1}{2\pi}f(x^-)\int_{-\pi}^0 D_n(s)ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (f(x+s) - f(x^+))D_n(s)ds + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^0 (f(x+s) - f(x^-))D_n(s)ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi g_+(s)\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)sds + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^0 g_-(s)\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)sds
\end{aligned}
$$

と変形できる. ただし, $g_\pm(s) = \dfrac{f(x+s) - f(x^\pm)}{\sin\frac{1}{2}s}$ (複号同順) とする. このとき f は区分的に滑らかであるから

$$
g_\pm(0^\pm) = \lim_{s\to\pm 0}\frac{f(x+s) - f(x^\pm)}{s}\cdot\frac{\frac{1}{2}s}{\sin\frac{1}{2}s}\cdot 2 = 2f'(x^\pm) \text{ (複号同順)}
$$

となり, $g_\pm$ も区分的に連続であることがわかる. 故に, Riemann-Lebesgue の定理から

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi g_+(s)\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)sds = 0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^0 g_-(s)\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)sds = 0
$$

が得られ

$$
\lim_{n\to\infty}(S_n f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}\ (x \in \mathbb{R})
$$

が示された. ■